Année 2013-2014

Travaux Dirigés
Introduction aux Télécommunications
Benoît ESCRIG

Filière : 2$^{\text{ème}}$ Année Electronique et Traitement du Signal

TD 1 : filtres, efficacités et filtrage adapté

Exercice : filtre de mise en forme

Soit un signal $s(t)$ de type biphase, de période T_s. Il y a $M = 2$ symboles possibles dont les valeurs sont prises dans l'alphabet $\{-1, +1\}$. Les symboles a_k, émis aux instants kT_s, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $\mathrm{P}[a_k = -1] = \mathrm{P}[a_k = +1] = 0,5$.

1. Exprimer $s(t)$ comme le résultat du filtrage d'un peigne de Dirac $a(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Exprimer $a(t)$ et $h(t)$.
2. Tracer le signal biphase $s(t)$ correspondant à l'émission de la suite de symboles suivante : $[-1, +1, +1, -1, +1, -1, -1]$.
3. Calculer la densité spectrale de puissance $S_{ss}(f)$ du signal $s(t)$. Tracer, sur une même figure, $S_{ss}(f)$ pour un signal biphase et pour un signal NRZ (Non Return to Zero) ayant les mêmes amplitudes et la même période symbole que le signal biphase ci-dessus. Comparer les densités spectrales de puissance.

Exercice : comparaison de deux modulations numériques

Soient deux modulations A et B dont les alphabets respectifs sont construits de la façon suivante :

- les symboles de la modulation A sont de la forme $\rho \exp(j\theta)$ où $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$
- les symboles de la modulation B sont de la forme $x+jy$ où $x \in \{-3, -1, +1, +3\}$ et $y \in \{-3, -1, +1, +3\}$

1. Sachant que l'occupation spectrale de ces modulations est de $2R_s$ où R_s désigne le débit symbole, calculer l'efficacité spectrale des deux modulations. En déduire la modulation la plus efficace spectralement. Indication : l'efficacité spectrale $\eta_s = R_b/W$ est le rapport entre R_b, le débit binaire transmis, et W, l'occupation spectrale du signal émis.
2. Calculer l'efficacité en puissance des deux modulations. En déduire la modulation la plus efficace. Indication : l'efficacité en puissance $\eta_p = d_{min}^2/\sigma_a^2$ est le rapport entre d_{min}^2, la distance minimale entre deux points de la constellation, au carré, et σ_a^2, la variance des symboles.
3. Conclure.

Exercice : comparaison de deux chaînes de transmission

Soit la chaîne de transmission bande de base présentée Figure 1 (une chaîne de transmission bande de base est une chaîne de transmission sans transposition en fréquence). Le signal $a(t)$ est le signal des

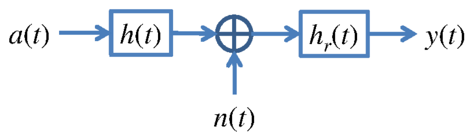

Figure 1: Chaîne de transmission bande de base.

symboles

$$a(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

où les $a_k \in \{-1, +1\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur l'alphabet, T_s est la période symbole, $h(t)$ est le filtre de mise en forme, $n(t)$ est un bruit additif réel, blanc et gaussien, de variance N_0, $h_r(t)$ est le filtre de réception et $y(t)$ est la sortie du filtre adapté. Par ailleurs, les signaux $y_s(t)$ et $y_n(t)$ suivants sont définis

$$\begin{aligned} y(t) &= y_s(t) + y_n(t) \\ y_s(t) &= a(t) * h(t) * h_r(t) \\ y_n(t) &= n(t) * h_r(t) \end{aligned}$$

1. Soit la suite de symboles suivante : $[-1 +1 -1 -1 +1 +1 +1]$. Représenter $y_s(t)$ pour les combinaisons suivantes :
   - $h(t) = \prod_{T_s}(t - T_s/2)$ et $h_r(t) = \prod_{T_s}(t - T_s/2)$
   - $h(t) = \prod_{T_s/2}(t - T_s/4)$ et $h_r(t) = \prod_{T_s}(t - T_s/2)$
2. Exprimer les valeurs de $y_s(mT_s)$ dans chacun des cas en fonction de a_k et $E_h = \int |h(t)|^2 dt$.
3. Calculer la puissance $P_n = E[|y_n(t)|^2]$ du bruit $y_n(t)$ dans chacun des cas.
4. Calculer le rapport signal à bruit SNR dans chacun des cas

$$SNR = \frac{|y_s(kT_s)|^2}{P_n}$$

5. Conclure.

TD 2 : filtres, interférences entre symboles, diagrammes de l'oeil et critère de Nyquist

Exercice : filtre en cosinus surélevé

Soit un signal émis $s(t)$ résultat du filtrage de symboles équiprobables et indépendants dans l'alphabet $\{-1, +1\}$, mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé de "roll-off" égal à 0,2. Le canal de transmission est idéal, de bande de $W = 1200$ Hz.

1. Quelle doit être la forme du filtre de réception ? Justifier la réponse.
2. En déduire le débit symbole R_s maximal pour une transmission sans interférence entre symboles.

Exercice : comparaison de deux chaînes de transmission

Reprendre l'exercice du TD 1 sur la comparaison des deux chaînes de transmission.

1. En se fondant sur la cascade $h(t) * h_r(t)$, déduire si les deux chaînes de transmission vérifient le critère de Nyquist ou non.
2. Vérifier les conclusions de la question précédente en traçant les diagrammes de l'oeil pour chacun des cas.

Exercice : interférences entre symboles

Soit la chaîne de transmission bande de base présentée Figure 2. Le signal $a(t)$ est le signal des

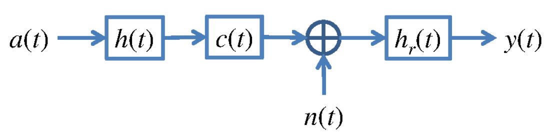

Figure 2: Chaîne de transmission bande de base.

symboles

$$a(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s) \tag{1}$$

où les $a_k \in \{-1, +1\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur l'alphabet, T_s est la période symbole, $h(t)$ est le filtre de mise en forme, $n(t)$ est un bruit additif réel, blanc et gaussien, de variance N_0, $h_r(t)$ est le filtre de réception et $y(t)$ est la sortie du filtre adapté. Le filtre d'émission $h(t)$ est de la forme

$$h(t) = \prod_{T_s/2}(t - \frac{T_s}{4})$$

Chaîne de transmission sans filtre canal $c(t)$

1. Déterminer $h_r(t)$, le filtre adapté à $h(t)$, de sorte que la cascade des deux filtres, notée $g(t)$, soit maximale en T_s. En déduire la forme de $g(t)$.
2. Tracer la sortie de $h_r(t)$, notée $y(t)$, pour la suite de symboles suivante : $[-1, +1, +1, -1, -1, +1]$.
3. Tracer le diagramme de l'œil en sortie du filtre adapté, sans bruit.
4. L'instant de décision pour un symbole émis à mT_s avec $m \in \mathbb{N}$ est fixé à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$. Y-a-t-il de l'interférence entre symboles ?
5. Lorsque la décision concernant le symbole émis à mT_s avec $m \in \mathbb{N}$ se fait à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/8$, y-a-t-il de l'interférence entre symboles ?

6. Dans le cas où les décisions se prennent à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$, exprimer la probabilité d'erreur binaire en fonction de N_0 et de $E_h = \int |h(t)|^2 dt$. En déduire la probabilité d'erreur en fonction de N_0 et E_b l'énergie moyenne transmise par bit.

Chaîne de transmission avec un canal à trajets multiples

Le signal $s(t)$ passe maintenant dans un canal tel que le signal reçu $r(t)$ s'exprime de sous la forme de deux trajets reçus avec des amplitudes et des retards différents

$$r(t) = \alpha_0 \times s(t - \tau_0) + \alpha_1 \times s(t - \tau_1) + n(t)$$

où $n(t)$ est un bruit additif réel, blanc et gaussien, de variance N_0.

1. Exprimer $c(t)$, la réponse impulsionnelle, du canal.
2. Pour $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0,6$, $\tau_0 = 0$ et $\tau_1 = T_s$, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence de symboles suivante : $[-1, +1, +1, -1, -1, +1]$. Indication: $h_r(t)$ est toujours adapté à $h(t)$ et non pas à $h(t) * c(t)$. Le bruit ne sera pas pris en compte.
3. Tracer le diagramme de l'oeil en sortie de $h_r(t)$. A-t-on de l'interférence entre symboles ?
4. L'instant de prise de décision relatif au symbole émis à mT_s est fixé à $T_s + mT_s$. Calculer la probabilité d'erreur binaire.
   (a) Exprimer d'abord $y(T_s + mT_s)$ en fonction des paramètres du canal, des symboles a_m et a_{m-1}, et d'un échantillon de bruit n_m dont la variance sera calculée.
   (b) Reprendre le calcul de la probabilité d'erreur depuis le départ, en distinguant bien les quatre cas de figure en fonction des valeurs de a_m et a_{m-1}.